

Aufgaben	Geben Sie an... Entscheiden Sie ...	Bestimmen/Ermitteln Sie...	Berechnen Sie... / Weisen sie nach... (beliebiger Operator + <i>rechnerisch</i>)
	- Bei den Operatoren, ist keine Begründung oder Rechnung erforderlich, sofern sie nicht durch einen ergänzenden Operator gefordert ist. - Objekte, Sachverhalte [...] Daten ohne nähere Erläuterungen, Begründungen und ohne Darstellungen von Lösungsansätzen oder Lösungswegen aufzählen	- Der GTR kann mit allen Funktionen umfänglich eingesetzt werden. - Zusammenhänge bzw. Lösungswege aufzeigen, das Vorgehen darstellen und Ergebnisse formulieren	Ansatz und Berechnung muss dargestellt werden, dabei sind weitere Lösungsschritte zu dokumentieren. Eine Argumentation, die auch auf das Ablesen von Werten und zusammenhänge am Funktionsgraphen oder auf die Verwendung von Rechnerfunktionen zur Analyse einer Funktion stützt (z.B. Maxima) erfüllt nicht die Erwartung. Die Zwischenschritte können mit dem GTR gelöst werden (pq-Formel, Lösen von Gleichungen etc.)
<u>Nullstellen</u> ... Nullstellen der Funktion $f(x) = -x^2 + 6x - 5$...	$NST(1 0) \quad NST(5 0)$	$f(x) = -x^2 + 6x - 5$ $0 = -x^2 + 6x - 5$ $x_1 = 1 \quad x_2 = 5$	$f(x) = -x^2 + 6x - 5$ $0 = -x^2 + 6x - 5$ $x_1 = 1 \quad x_2 = 5$
<u>Extremstellen/-punkte</u> ... Extrempunkte der Funktion $f(x) = -x^3 + 12x - 5$...	$HP(2 11) \quad TP(-2 -37)$	Zur Bestimmung der Hoch- und Tiefpunkte, sollte der GTR mit seiner Graphikfunktion (oder Rechenfunktion) (polyRoots, nSolve) genutzt werden. z.B. Die graphische Analyse ergibt: $HP(2 11) \quad TP(-2 -37)$	$f'(x) = -3x^2 + 12$ $f''(x) = -6x$ not. Bed. $f'(x) = 0$ $0 = -3x^2 + 12$ $x_1 = 2 \quad x_2 = -2$ hin. Bed. $f'(x) = 0 \wedge f''(x) \neq 0$ $f''(2) = -12 < 0 \Rightarrow HP$ $f''(-2) = 12 > 0 \Rightarrow TP$ $HP(2 11) \quad TP(-2 -37)$
<u>Wendestellen/-punkte</u> ... Wendepunkte der Funktion $f(x) = -x^2 + 6x - 5$...	vgl. Extrempunkte	vgl. Extrempunkte	vgl. Extrempunkte

<u>Flächeninhalt</u> den Inhalt der Fläche ..., die der Graph im ersten Quadranten mit der x-Achse einschließt.	Minimallösung: • Nullstellen (Ansatz, Lösen z.B. mit dem GTR) • pq-Formel • Integral • Stammfunktion • Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung • Werte ausrechnen • Ergebnis $A = 10 \frac{2}{3} [FE]$	Minimallösung: • Nullstellen (Ansatz, Lösen z.B. mit dem GTR) • pq-Formel • Integral • Stammfunktion • Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung • Werte ausrechnen • Ergebnis $f(x) = -x^2 + 6x - 5$ $NST(1 0) \quad NST(5 0)$ $\int_1^5 -x^2 + 6x - 5 \, dx$ $= 10 \frac{2}{3} [FE]$	Minimallösung: • Nullstellen (Ansatz, Lösen z.B. mit dem GTR) • pq-Formel • Integral • Stammfunktion • Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung • Werte ausrechnen • Ergebnis $f(x) = -x^2 + 6x - 5$ $0 = -x^2 + 6x - 5$ $x_1 = 1 \quad x_2 = 5$ $\int_1^5 -x^2 + 6x - 5 \, dx$ $= \left[-\frac{1}{3}x^3 + 3x^2 + 5x \right]_1^5$ $= 10 \frac{2}{3} [FE]$ $f(x) = -x^2 + 6x - 5$ $F(x) = -\frac{1}{3}x^3 + 3x^2 + 5x$ $\int_1^5 -x^2 + 6x - 5 \, dx$ $= F(5) - F(1)$ $= 10 \frac{2}{3} [FE]$
<u>Wahrscheinlichkeiten</u> <u>Binomialverteilung</u> ... die Wahrscheinlichkeit genau fünf Sechsen (Treffer) bei 20 Würfelwürfen zu erhalten. ... die Wahrscheinlichkeit mehr als fünf Sechsen (Treffer) bei 20 Würfelwürfen zu erhalten.	$P(X=5) \approx 0,1294 = 12,94$ $P(X>5) \approx 0,10184 = 10,18$	Angabe von n und p und X $P(X=5) \approx 0,1294 = 12,94$ $P(X>5) = 1 - P(X \leq 5)$ $\approx 0,10184 = 10,18 \%$	$P(X=5) = B_{20, \frac{1}{6}}(5) \approx 0,1294$ $P(X>5) = 1 - P(X \leq 5)$ $= 1 - F_{20, \frac{1}{6}}(5)$ $\approx 0,10184 = 10,18 \%$

<u>Problemlösen mit der Binomialverteilung</u> ... wie viele Versuche mindestens durchgeführt werden müssen, damit mit 60% iger Wahrscheinlichkeit mind. 3 Treffer erfolgen.	$p = 0,02 \quad n = ? \quad k \geq 3$ Es müssen mindestens 155 Durchführungen erfolgen.	$p = 0,02 \quad n = ? \quad k \geq 3$ $P(X \geq 3) \geq 0,6$ $P(X \leq 2) \leq 0,4$ $F_{154,0,2}(2) \approx 0,403$ $F_{155,0,2}(2) \approx 0,399 < 0,4$ Es müssen mindestens 155 Durchführungen erfolgen. (Hinweis: Es muss ein Hinweis auf die Binomialverteilung erkennbar sein.)	$p = 0,02 \quad n = ? \quad k \geq 3$ $P(X \geq 3) \geq 0,6$ $1 - P(X \leq 2) \geq 0,6$ $P(X \leq 2) \leq 0,4$ $F_{x,0,02}(2) \leq 0,4$ $F_{154,0,2}(2) \approx 0,403$ $F_{155,0,2}(2) \approx 0,399 < 0,4$ Es müssen mindestens 155 Durchführungen erfolgen.
<u>Wahrscheinlichkeit Normalverteilung</u> ... die Wahrscheinlichkeit, dass die Geschwindigkeit höchstens 30 km/h beträgt.	$P(X \leq 30) = \approx 0,3875 = 38,75 \%$	$P(X \leq 30) = \int_{-\infty}^{30} \phi_{32,7}(x) dx$ $\approx 0,3875 = 38,75$	$P(X \leq 30) = \int_{-\infty}^{30} \phi_{32,7}(x) dx$ $\approx 0,3875 = 38,75$
<u>Signifikanztest</u>	Nullhypothese $H_0: p_0 = 0,4$ Alternative $H_1: p_1 \neq 0,4$ Signifikanzniveau $\alpha = 5\%$ Annahmebereich $[a;b]$ Ablehnungsbereich $[0;a-1]$ und $[b+1;n]$ Annahmebereich $[31;50]$ Ablehnungsbereich $[0;30]$ und $[51;100]$ Die Hypothese wird für Trefferwerte von 0 bis 30 und 51 bis 100 abgelehnt und für 31 bis 50 beibehalten.	Nullhypothese $H_0: p_0 = 0,4$ Alternative $H_1: p_1 \neq 0,4$ Signifikanzniveau $\alpha = 5\%$ Annahmebereich $[a;b]$ Ablehnungsbereich $[0;a-1]$ und $[b+1;n]$ $P(X \leq a-1) = 0,025$ $\stackrel{GTR}{\Rightarrow} a = 31$ (Hinweis: Es muss ein Hinweis auf die Binomialverteilung erkennbar sein.) $P(X > b) \leq 0,025$ $P(x \leq b) \geq 0,975$ $\stackrel{GTR}{\Rightarrow} b = 50$ Annahmebereich $[31;50]$ Ablehnungsbereich $[0;30]$ und $[51;100]$ Die Hypothese wird für Trefferwerte von 0 bis 30 und 51 bis 100 abgelehnt und für 31 bis 50 beibehalten.	Nullhypothese $H_0: p_0 = 0,4$ Alternative $H_1: p_1 \neq 0,4$ Signifikanzniveau $\alpha = 5\%$ Annahmebereich $[a;b]$ Ablehnungsbereich $[0;a-1]$ und $[b+1;n]$ $P(X \leq a-1) = 0,025$ $P(x \leq k) = 0,025 \text{ wobei } k = a-1$ $F_{100,0,4}(k) \leq 0,02$ $F_{100,0,4}(30) \approx 0,0248 < 0,025$ $F_{100,0,4}(31) \approx 0,0398$ $\Rightarrow k = 30 \Rightarrow a = 31$ $P(X > b) \leq 0,025$ $1 - P(x \leq b) \leq 0,025$ $P(x \leq b) \geq 0,975$ $F_{100,0,4}(k) \leq 0,02$ $F_{100,0,4}(49) \approx 0,9729$ $F_{100,0,4}(50) \approx 0,9832 > 0,975$ $\Rightarrow b = 50$ Annahmebereich $[31;50]$ Ablehnungsbereich $[0;30]$ und $[51;100]$

			Die Hypothese wird für Trefferwerte von 0 bis 30 und 51 bis 100 abgelehnt und für 31 bis 50 beibehalten. Alternativ kann auch über $P(X \geq a) > 0,025$ argumentiert werden.
Folgeverteilung ... die Verteilung nach 2 Wechseln (z.B. Wochen).	$\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}$	$\vec{v}_2 = M^2 \cdot \vec{v}_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}$	$\vec{v}_2 = M^2 \cdot \vec{v}_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}$
stabile Verteilung ... die stabile Verteilung.	$\vec{g} = \begin{pmatrix} 0,186 \\ 0,339 \\ 0,475 \end{pmatrix}$	$\vec{g} = M \cdot \vec{g} = \begin{pmatrix} 0,186 \\ 0,339 \\ 0,475 \end{pmatrix}$	$\vec{g} = M \cdot \vec{g} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,2 & 0,3 & 0,1 \\ 0,4 & 0,5 & 0,2 \\ 0,4 & 0,2 & 0,7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ LGS $\begin{aligned} x_1 &= 0,2 x_1 + 0,3 x_2 + 0,1 x_3 \\ x_2 &= 0,4 x_1 + 0,5 x_2 + 0,2 x_3 \\ x_3 &= 0,4 x_1 + 0,2 x_2 + 0,7 x_3 \\ 1 &= x_1 + x_2 + x_3 \end{aligned}$ $x_1 \approx 0,186 \quad x_2 \approx 0,339 \quad x_3 \approx 0,475$ $\vec{g} = \begin{pmatrix} 0,186 \\ 0,339 \\ 0,475 \end{pmatrix}$
Grenzmatrix ... die Grenzmatrix.	$M^\infty = \begin{pmatrix} 0,2 & 0,3 & 0,1 \\ 0,4 & 0,5 & 0,2 \\ 0,4 & 0,2 & 0,7 \end{pmatrix}$ Hinweis: Sollte diese Matrix interpretiert werden, sollte man einerseits die Unabhängigkeit/Abhängigkeit vom Startvektor untersuchen und die Einträge deuten.	$M^\infty = \begin{pmatrix} 0,2 & 0,3 & 0,1 \\ 0,4 & 0,5 & 0,2 \\ 0,4 & 0,2 & 0,7 \end{pmatrix}$ Hinweis: Sollte diese Matrix interpretiert werden, sollte man einerseits die Unabhängigkeit/Abhängigkeit vom Startvektor untersuchen und die Einträge deuten.	$M^{100} \approx \begin{pmatrix} 0,2 & 0,3 & 0,1 \\ 0,4 & 0,5 & 0,2 \\ 0,4 & 0,2 & 0,7 \end{pmatrix}$ $M^{200} \approx \begin{pmatrix} 0,2 & 0,3 & 0,1 \\ 0,4 & 0,5 & 0,2 \\ 0,4 & 0,2 & 0,7 \end{pmatrix}$ $\Rightarrow M^\infty \approx \begin{pmatrix} 0,2 & 0,3 & 0,1 \\ 0,4 & 0,5 & 0,2 \\ 0,4 & 0,2 & 0,7 \end{pmatrix}$ Hinweis: Sollte diese Matrix

			interpretiert werden, sollte man einerseits die Unabhängigkeit/ Abhängigkeit vom Startvektor untersuchen und die Einträge deuten.
<u>Schnittgebilde</u> ... die Lagebeziehung von der Geraden g und der Ebene E. ... die Lagebeziehung von der Ebene E₁ und der Ebene E₂.	$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $E: 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 10$ $P(16 -12 -17)$ $E_1: 2x_1 - x_2 + 3x_3 = -2$ $E_2: -x_1 - x_2 + x_3 = 4$ $\vec{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} \\ \frac{5}{3} \\ 1 \end{pmatrix}$	$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $E: 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 10$ g in E $s = -15$ $\vec{x} = \begin{pmatrix} 16 \\ -12 \\ -17 \end{pmatrix}$ $P(16 -12 -17)$ $E_1: 2x_1 - x_2 + 3x_3 = -2$ $E_2: -x_1 - x_2 + x_3 = 4$ LGS $2x_1 - x_2 + 3x_3 = -2$ $-x_1 - x_2 + x_3 = 4$ $\stackrel{GTR}{\Rightarrow} x_3 = c \quad x_2 = \frac{5}{3}c \quad x_1 = -\frac{2}{3}c - 2$ $\vec{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} \\ \frac{5}{3} \\ 1 \end{pmatrix}$	$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $E: 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 10$ g in E $2(1-s) - (3+s) + 2(-2+s) = 10$ $s = -15$ $\vec{x} = \begin{pmatrix} 16 \\ -12 \\ -17 \end{pmatrix}$ $\Rightarrow P(16 -12 -17)$ $E_1: 2x_1 - x_2 + 3x_3 = -2$ $E_2: -x_1 - x_2 + x_3 = 4$ LGS $2x_1 - x_2 + 3x_3 = -2$ $-x_1 - x_2 + x_3 = 4$ $\stackrel{GTR}{\Rightarrow} x_3 = c \quad x_2 = \frac{5}{3}c \quad x_1 = -\frac{2}{3}c - 2$ $\vec{x} = \begin{pmatrix} -\frac{2}{3}c - 2 \\ \frac{5}{3}c \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} \\ \frac{5}{3} \\ 1 \end{pmatrix}$
<u>Winkel bestimmen</u> ... den Winkel zwischen den Vektoren $\vec{u} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} .$	$\alpha \approx 56,94^\circ$	$\vec{u} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\cos(\alpha) = \frac{\vec{u} * \vec{v}}{ \vec{u} \cdot \vec{v} }$ $\cos(\alpha) \approx 0,5456$ $\alpha \approx 56,94^\circ$	$\vec{u} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\cos(\alpha) = \frac{\vec{u} * \vec{v}}{ \vec{u} \cdot \vec{v} }$ $= -\frac{5}{\sqrt{6} \cdot \sqrt{14}}$ $\cos(\alpha) \approx 0,5456$ $\alpha \approx 56,94^\circ$

Normalenvektor bestimmen

... den Normalenvektor zu u und v

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$
$$\vec{n} = \vec{u} \times \vec{v}$$
$$\vec{n} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$
$$\vec{n} = \vec{u} \times \vec{v}$$
$$\vec{n} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Abstände

... den Abstand der Gerade g zur Geraden h.

Der Abstand beträgt $\frac{-3}{\sqrt{10}}$ [LE]

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + u \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$
$$h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} + v \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$E_H: 3x_1 + x_2 = 4$$

Abstand Punkt Ebene mit der Hesse'schen NF.

$$t = \frac{ax_1 + bx_2 + cx_3 - d}{|\vec{n}|}$$

$$t = -\frac{3}{\sqrt{10}} \text{ [LE]}$$

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + u \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$
$$h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} + v \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Hilfsebene zu g aufstellen (in Koordinatenform)

$$E_H: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + u \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + v \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\vec{n} = \vec{u} \times \vec{v}$$

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$3x_1 + x_2 = d$$

$$3 \cdot 1 + 1 \cdot 1 = d$$

$$3x_1 + x_2 = 4$$

Abstand Punkt Ebene mit der Hesse'schen NF.

... den Abstand der Geraden j zur Ebene E.

Der Abstand beträgt $\frac{9}{\sqrt{3}}$ [LE]

$$j: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix} + q \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$E: \vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} * \left[\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -5 \\ 8 \\ 5 \end{pmatrix} \right]$$

$$-x_1 - x_2 - x_3 = -8$$

$$t = \frac{ax_1 + bx_2 + cx_3 - d}{|\vec{n}|}$$

$$t = \frac{9}{\sqrt{3}} \text{ [LE]}$$

$$t = \frac{ax_1 + bx_2 + cx_3 - d}{|\vec{n}|}$$

$$t = \frac{3 \cdot 0 + 1 \cdot 1 - 4}{\sqrt{3^2 + 1^2}}$$

$$= -\frac{3}{\sqrt{10}} \text{ [LE]}$$

$$j: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix} + q \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$E: \vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} * \left[\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -5 \\ 8 \\ 5 \end{pmatrix} \right]$$

$$-x_1 - x_2 - x_3 = d$$

$$-(-5) - 8 - 5 = d \Leftrightarrow -8 = d$$

$$-x_1 - x_2 - x_3 = -8$$

$$t = \frac{ax_1 + bx_2 + cx_3 - d}{|\vec{n}|}$$

$$t = \frac{-1 \cdot 1 - 1 \cdot 4 - 1 \cdot (-3) + 8}{\sqrt{3 \cdot (-1)^2}}$$

$$= \frac{9}{\sqrt{3}} \text{ [LE]}$$