

Definition der Proportionalität: Zwei Größen x und y heißen genau dann proportional zueinander, wenn das Verhältnis $y:x$ konstant ist, d.h. wenn es eine Konstante k gibt, für die gilt: $y : x = k$. k heißt Proportionalitätsfaktor. Für proportionale Größen gilt z.B.: Verdoppelt sich die eine Größe, so verdoppelt sich auch die andere Größe.		
Definition der Antiproportionalität: Zwei Größen heißen genau dann antiproportional (oder „umgekehrt proportional“), wenn ihr Produkt konstant ist, d.h. wenn es eine Konstante c gibt, für die gilt: $x \cdot y = c$. Für antiproportionale Größen gilt z.B.: Verdoppelt sich die eine Größe, so halbiert sich die andere Größe.		
Der Betrag: Unter dem Betrag (auch Absolutbetrag genannt) einer Zahl versteht man den Abstand, den diese Zahl auf der Zahlengeraden von der Zahl 0 besitzt. Der Betrag jeder Zahl ist ≥ 0 . Formal wird der Betrag folgendermaßen definiert: $ a = \begin{cases} a & \text{für } a \geq 0 \\ -a & \text{für } a < 0 \end{cases}$ Für den Betrag einer Summe gilt der folgende Satz (Dreiecksungleichung): $ a + b \leq a + b $		
Pascalsches Dreieck $\begin{array}{c} 1 \\ 1 \ 1 \\ 1 \ 2 \ 1 \\ 1 \ 3 \ 3 \ 1 \\ 1 \ 4 \ 6 \ 4 \ 1 \\ 1 \ 5 \ 10 \ 10 \ 5 \ 1 \\ \text{u.s.w.} \end{array}$	Das Pascaldreieck ist ein Zahlendreieck, das in der obersten Zeile (=Zeile Nr.0) nur eine 1 stehen hat und dann von Zeile zu Zeile eine Zahl mehr erhält. Vorne und hinten in jeder Zeile steht eine 1. Die restlichen Zahlen entstehen durch Addition der beiden schräg darüber stehenden Zahlen.	Formel zur Berechnung der Zahlen des Pascaldreiecks: Die Zahl aus Zeile Nr.n und Spalte Nr.k (Die Spalten verlaufen parallel zu der linken Dreiecksseite. Die ganz linke Spalte mit lauter Einsen hat die Nr. 0) berechnet sich nach folgender Formel: $\frac{n!}{k!(n-k)!}$ Man nennt diese Zahl $\binom{n}{k}$.
Binomische Formeln: 1.) $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ 2.) $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ 3.) $(a+b) \cdot (a-b) = a^2 - b^2$ Höhere Potenzen der Binome: $(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3$; $(a \pm b)^4 = a^4 \pm 4a^3b + 6a^2b^2 \pm 4ab^3 + b^4$ Die Koeffizienten der Potenz $(a \pm b)^n$ sind die Zahlen $\binom{n}{0}, \binom{n}{1}, \binom{n}{2}, \dots, \binom{n}{n}$ aus der Zeile Nr.n des Pascalschen Dreiecks.		
Das Lösen von quadratischen Gleichungen: Zuerst wird die Gleichung in Normalform gebracht: $x^2 + px + q = 0$ Dann wird die p-q-Formel angewandt: $x_{1/2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$. Der Radikand (Ausdruck unter der Wurzel) entscheidet über die Anzahl der Lösungen. Er wird deshalb auch Diskriminante genannt. Falls die Diskriminante = 0 ist, gibt es genau eine Lösung, falls sie > 0 ist, gibt es zwei Lösungen, falls sie < 0 ist, gibt es keine Lösungen. Für den Fall, dass die Lösungen ganze Zahlen sind, lässt sich die Gleichung mit folgendem Satz lösen: Viëtascher Wurzelsatz: $x_1 + x_2 = -p$ und $x_1 \cdot x_2 = q$		
Potenzen: Ein Ausdruck der Form a^x heißt Potenz . a heißt Grundzahl oder Basis , x heißt Hochzahl oder Exponent . Es wird definiert: $a^0 = 1$ und $a^n = a \cdot a \cdot \dots \cdot a$ (n mal), wobei der Exponent n eine natürliche Zahl ist. Für negative ganze Zahlen -n wird definiert: $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$. Für rationale Exponenten $\frac{p}{q}$ wird definiert: $a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{a^p}$		
Potenzgesetze: 1.) $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$ und $a^x : a^y = a^{x-y}$ 2.) $a^x \cdot b^x = (a \cdot b)^x$ und $a^x : b^x = (a : b)^x$ 3.) $(a^x)^y = a^{x \cdot y}$		
Sinus, Kosinus, Tangens: Im rechtwinkligen Dreieck gilt: $\sin \alpha = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypotenuse}}$ $\cos \alpha = \frac{\text{Ankathete}}{\text{Hypotenuse}}$ $\tan \alpha = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Ankathete}}$		
Logarithmen: Der Logarithmus einer Zahl z zur Basis a ist diejenige Hochzahl x, für die gilt: $a^x = z$. Man schreibt: $x = \log_a z$. Die Bestimmung des Logarithmus von einer Zahl nennt man Logarithmieren. Logarithmieren ist die Umkehrung des Exponierens, so wie das Wurzelziehen (=Radizieren) die Umkehrung des Potenzierens ist. Beispiel 1: Ich potenziere die Basis 2 mit der Hochzahl 3 und erhalte das Ergebnis 8. Dieser Vorgang wird rückgängig gemacht durch das Ziehen der dritten Wurzel. Ich erhalte die Basis 2 zurück. Beispiel 2: Ich exponiere die 3 zur Basis 2 (d.h. ich „stelle die 3 heraus“ als Hochzahl oben an die 2) und erhalte als Ergebnis 8. Dieser Vorgang wird rückgängig gemacht durch Logarithmieren zur Basis 2. Ich erhalte die Hochzahl 3 zurück.		
Logarithmusgesetze: 1.) $\log_a(x \cdot y) = \log_a x + \log_a y$ 2.) $\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y$ 3.) $\log_a(x^r) = r \cdot \log_a x$ Umrechnungsformel: $\log_b z = \frac{\log_a z}{\log_a b}$ Diese Formel erlaubt es, Logarithmen beliebiger Basis auf Logarithmen einer bestimmten Basis umzurechnen. Auf dem TR ist z.B. der Zehnerlogarithmus ($\log_{10}$ oder kurz lg) programmiert, nicht aber der Logarithmus zur Basis 2. Hier hilft die Formel: $\log_2 1024 = \frac{\lg 1024}{\lg 2} = 10.$		

Funktionen: Eine Zuordnung $x \rightarrow y$, die jeder Zahl x aus einer Menge D (genannt: Definitionsmenge) genau eine Zahl y aus einer Menge W (genannt: Wertemenge) zuordnet, heißt Funktion. Bemerkung: Funktionen sind eindeutige Zuordnungen, insofern nämlich, als jedem x genau ein y zugeordnet wird. Es gibt immer genau einen Funktionswert für jedes x. Für manche Funktionen gilt auch das Umgekehrte, dass nämlich zu jedem Funktionswert y auch nur genau ein x-Wert existiert. Solche Funktionen heißen ein-ein-deutig oder umkehrbar eindeutig. Für solche Funktionen ist auch die umgekehrte Zuordnung $y \rightarrow x$ eine Funktion. Die ursprüngliche Funktion heißt deshalb auch umkehrbar.	
Umkehrfunktionen: f sei eine umkehrbare Funktion. Dann heißt die umgekehrte Zuordnung, die jedem y-Wert wieder seinen x-Wert zuordnet, „Umkehrfunktion von f“.	
Satz über Umkehrbarkeit: Wenn eine Funktion über einem Intervall streng monoton ist, dann ist sie über diesem Intervall auch umkehrbar. (Eine Funktion f heißt streng monoton, wenn sie streng monoton fällt oder streng monoton steigt. Sie heißt streng monoton fallend, wenn für $a > b$ gilt: $f(a) < f(b)$. Sie heißt streng monoton steigend, wenn für $a > b$ gilt: $f(a) > f(b)$.)	
Bestimmung der Umkehrfunktion: Man erhält die Funktionsgleichung der Umkehrfunktion, indem man in der Gleichung der Ausgangsfunktion x und y vertauscht und dann nach y auflöst. Man erhält den Graphen der Umkehrfunktion, indem man den Graphen der Ausgangsfunktion an der ersten Winkelhalbierenden spiegelt.	Beispiele für Umkehrfunktionen: - Die Potenzfunktion $y = x^2$ ist umkehrbar über dem Intervall $[0; \infty[$. Die Gleichung der Umkehrfunktion lautet: $y = \sqrt{x}$. - Die Exponentialfunktion $y = 2^x$ ist über ganz $\mathbb{R}$ umkehrbar. Die Gleichung der Umkehrfunktion lautet: $y = \log_2 x$.
Lineare Funktionen: Lineare Funktionen haben eine Gleichung der Form $y = m \cdot x + b$. Das Schaubild ist eine Gerade mit der Steigung m, die die y-Achse bei b schneidet.	
Geraden im Koordinatensystem: Jede Gerade im zweidimensionalen Koordinatensystem lässt sich durch eine Gleichung der Form $ax + by = c$, wobei a und b nicht beide gleich 0 sind, beschreiben. - Ist $b = 0$, so verläuft die Gerade parallel zur y-Achse. - Ist $a = 0$, so verläuft die Gerade parallel zur x-Achse.	
Achsenabschnittsform der Geradengleichung: $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ a ist der x-Achsenabschnitt, b der y-Achsenabschnitt von g.	
Normalform der Geradengleichung: $y = mx + b$ (Sie existiert nur für Geraden, die nicht parallel zur y-Achse verlaufen.)	
Formel für die Steigung: Wenn $P_1(x_1 y_1)$ und $P_2(x_2 y_2)$ von g gegeben sind, dann berechnet sich die Steigung der Geraden g nach folgender Formel: $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$. (Falls P_1 und P_2 senkrecht übereinander liegen, d.h. $x_1 - x_2 = 0$ ist $m = \infty$.)	
Zwei-Punkte-Form der Geradengleichung: $\frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ Punkt-Steigungs-Form der Geradengleichung: $\frac{y - y_1}{x - x_1} = m$	
Orthogonale Steigung: g sei eine Gerade mit der Steigung m_g. Wenn die Gerade h orthogonal (senkrecht) zu g ist, ist ihre Steigung negativ reziprok zu m_g.	$m_h = -\frac{1}{m_g}$ oder anders ausgedrückt: $m_g \cdot m_h = -1$
Abstand zweier Punkte oder Länge der Strecke AB: Zwei Punkte $A(x_1 y_1)$ und $B(x_2 y_2)$ haben den Abstand $\overline{AB} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$	
Mittelpunkt der Strecke AB: Zwei Punkte $A(x_1 y_1)$ und $B(x_2 y_2)$ haben den Mittelpunkt $M\left(\frac{x_1 + x_2}{2} \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$	
Fläche eines Dreiecks: Die Fläche eines Dreiecks berechnet sich nach der Formel: $F = \frac{1}{2} \cdot g \cdot h$.	
Winkel zwischen Gerade und x-Achse: Geradengleichung: $y = mx + b$ m ist die Steigung der Geraden Für den Winkel α zwischen Gerade und x-Achse gilt: $\tan \alpha = m$. Also ist $\alpha = \tan^{-1}(m)$ Wenn α negativ ist, bedeutet das, dass die Gerade fällt.	
Winkel zwischen zwei Geraden: $\alpha = \left \tan^{-1}(m_1) - \tan^{-1}(m_2) \right$ Dabei sind m_1 und m_2 die Steigungen der beiden Geraden.	
Kreisgleichung: Für alle Punkte des Kreises mit Mittelpunkt $M(m_1 m_2)$ und dem Radius r gilt die Gleichung: $(x - m_1)^2 + (y - m_2)^2 = r^2$	
Tangentengleichung: Die Tangente an den Kreis mit Mittelpunkt M und dem Radius r im Punkt $B(x_B, y_B)$ hat die Gleichung $(x - x_M)(x_B - x_M) + (y - y_M)(y_B - y_M) = r^2$	
Tangenten an einen Kreis von einem Punkt außerhalb aus: Die beiden Berührungspunkte Q und R liegen auf der Geraden mit folgender Gleichung: $(x_P - x_M)(x - x_M) + (y_P - y_M)(y - y_M) = r^2$	

Zahlenfolgen: Eine Funktion f mit dem Definitionsbereich $\mathbb{N}$ und dem Wertebereich $\mathbb{R}$ heißt Zahlenfolge. Die Funktionswerte $f(1), f(2), f(3), \dots$ werden mit $a_1, a_2, a_3, \dots$ bezeichnet und heißen Folgenglieder. Die ganze Folge wird mit dem Symbol $\langle a_n \rangle$ bezeichnet.	
Grenzwert einer Zahlenfolge: Eine Zahl g heißt Grenzwert der Zahlenfolge $\langle a_n \rangle$ genau dann, wenn gilt: $\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \forall n > N : a_n - g < \varepsilon$ Eine Zahlenfolge heißt konvergent gegen g genau dann, wenn sie den Grenzwert g besitzt. Man schreibt: $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = g$	
Unendliche Summern: Unendliche Summen (Bsp.: $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots$) sind spezielle Zahlenfolgen. Ihnen liegt eine andere Zahlenfolge $\langle a_n \rangle$ zugrunde, deren Teilsummen $a_1, a_1 + a_2, a_1 + a_2 + a_3, \dots$ gebildet werden. Die Folge der Teilsummen einer Folge heißt Reihe . Die unendliche Summe $a_1 + a_2 + a_3 + \dots$ ist ein Symbol für die Reihe und auch für den Grenzwert der Reihe, falls ein Grenzwert existiert.	
Potenzsummen: $1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$; $1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$; $1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$	
Grenzwert einer Funktion: a) Grenzwert im Unendlichen: Eine Zahl g heißt Grenzwert der Funktion f für $x \rightarrow \infty$ (bzw. $x \rightarrow -\infty$) genau dann, wenn gilt: $\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{R} \forall x > N : f(x) - g < \varepsilon \quad (\text{bzw. } \forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{R} \forall x < N : f(x) - g < \varepsilon)$ Man schreibt: $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = g$ (bzw. $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = g$) b) Grenzwert an einer Stelle (lokaler Grenzwert): f sei eine Funktion und x_0 besitze eine Umgebung U , für die gilt: $U \setminus \{x_0\} \subset D_f$. Eine Zahl g heißt Grenzwert der Funktion an der Stelle x_0 genau dann, wenn jede gegen x_0 konvergierende Zahlenfolge, deren Werte in U liegen, den Grenzwert g besitzt.	
Grenzwertsätze: f und g seien zwei Funktionen. Sowohl für $\lim_{x \rightarrow x_0}$ als auch für $\lim_{x \rightarrow \infty}$ gilt: 1.) $\lim (f(x) + g(x)) = \lim f(x) + \lim g(x)$ 2.) $\lim (f(x) - g(x)) = \lim f(x) - \lim g(x)$ 3.) $\lim (f(x) \cdot g(x)) = \lim f(x) \cdot \lim g(x)$ 3.) $\lim ((f(x):g(x))) = \lim f(x) : \lim g(x)$ falls $\lim g(x) \neq 0$.	
Stetigkeit: Eine Funktion f heißt stetig an der Stelle $x_0 \in D_f$ genau dann, wenn der Grenzwert $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ existiert und wenn gilt: $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$.	
Durchschnittsgeschwindigkeit: Gegeben ist eine Weg-Zeit-Funktion $f(t)$. Der Ausdruck $\frac{f(t_2) - f(t_1)}{t_2 - t_1}$ gibt die Durchschnittsgeschwindigkeit im Zeitintervall $[t_1, t_2]$ an.	
Momentangeschwindigkeit zum Zeitpunkt t_0: $\lim_{t \rightarrow t_0} \frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0}$	
Differenzenquotient: Der Ausdruck $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ heißt Differenzenquotient einer Funktion $f(x)$ an der Stelle x_0 . Es gibt auch folgende Schreibweise für den Differenzenquotienten: $\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$.	
Geometrische Bedeutung des Differenzenquotienten: Der Differenzenquotient gibt die Sekantensteigung der Sekante durch die beiden Punkte $(x_0 / f(x_0))$ und $(x / f(x))$ an.	
Tangentensteigung an der Stelle x_0: $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ oder $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$	
Ableitung und Differenzierbarkeit: Eine Funktion f heißt differenzierbar an der Stelle x_0 , wenn der Grenzwert $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ existiert. Man nennt diesen Grenzwert Ableitung von f an der Stelle x_0 und schreibt $f'(x_0)$. Die Funktion, die jedem x aus dem Differenzierbarkeitsbereich von f den Wert $f'(x)$ zuordnet, heißt Ableitungsfunktion von f . Es gilt: Die Ableitung $f'(x_0)$ gibt die Steigung des Graphen von f im Punkte $P(x_0 / f(x_0))$ an.	
Tangentengleichung der Tangente an den Graphen von f im Punkt $P(x_B y_B)$: $y = f'(x_B) \cdot (x - x_B) + f(x_B)$	
Ableitungsregeln: Es seien u und v zwei Funktionen. Überall, wo u und v differenzierbar sind, sind auch die Funktionen, $c \cdot u$ (c konstant), $u + v$, $u - v$, $u \cdot v$ und $u : v$ differenzierbar (letztere nur, wo v nicht Null ist) und es gilt:	
Faktorregel: $[c \cdot u]' = c \cdot u'$ Summenregel: $[u \pm v]' = u' \pm v'$ Produktregel: $[u \cdot v]' = u' \cdot v + u \cdot v'$	
Quotientenregel: $\left[\frac{u}{v} \right]' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$ Für Potenzfunktionen gilt die Potenzregel: $[x^n]' = n \cdot x^{n-1}$, $n \in \mathbb{R}$	

Kurvendiskussion ganzrationaler Funktionen:

Ableitungen:

Bilde die drei ersten Ableitungen von f .

Verhalten im Unendlichen:

Untersuche, ob der Graph von f von unten links oder von oben links kommt sowie, ob der Graph von f nach oben rechts oder nach unten rechts geht.

Symmetrie:

(Es geht nur um die Symmetrie zur y -Achse oder zum Ursprung)

METHODE 1 (auch für andere Funktionentypen geeignet):

Berechne $f(-x)$ und vergleiche mit $f(x)$.

Aus $f(-x) = f(x)$ folgt: f ist achsensymmetrisch zur y -Achse.

Aus $f(-x) = -f(x)$ folgt: f ist punktsymmetrisch zum Ursprung.

Schneller geht es so:

METHODE 2 (gilt nur für ganzrationale Funktionen):

Wenn $f(x)$ nur gerade x -Potenzen enthält, ist der Graph achsensymmetrisch zur y -Achse.

Wenn $f(x)$ nur ungerade x -Potenzen enthält, ist der Graph punktsymmetrisch zum Ursprung.

Wenn $f(x)$ gerade und ungerade x -Potenzen enthält, ist der Graph weder zur y -Achse, noch zum Ursprung symmetrisch.

(Konstanten zählen dabei als gerade x -Potenzen, weil man x^0 dahinter ergänzen kann)

Achsenschnittpunkte:

S_y : Berechne $f(0)$. Das ist der y -Wert des Schnittpunktes mit der y -Achse. Gib S_y an: $S_y (0|f(0))$

S_x : Setze $f(x)$ gleich 0 und löse nach x auf. Das ist der x -Wert des Schnittpunktes mit der x -Achse. Der y -Wert ist 0.

Extrema:

notwendige Bedingung: $f'(x) = 0$

Setze $f'(x)$ gleich 0 und löse nach x auf.

Hinreichende Bedingung: $f'(x) = 0$ und $f''(x) \neq 0$

Setze die gefundenen x -Werte in f'' ein.

Falls $f''(x_0) > 0$ ist, folgt: f hat an der Stelle x_0 ein relatives Minimum (Tiefpunkt).

Falls $f''(x_0) < 0$ ist, folgt: f hat an der Stelle x_0 ein relatives Maximum (Hochpunkt).

(Sollte die hinreichende Bedingung nicht erfüllt sein, prüfe zunächst, ob bei x_0 ein Wendepunkte vorliegt.

Falls nein, untersuche, ob f' bei x_0 das VZ wechselt.

Wechselt das VZ von f' von $-$ nach $+$, liegt ein Tiefpunkt vor, wechselt es von $+$ nach $-$, liegt ein Hochpunkt vor.)

Berechne die y -Werte der Extrema, indem Du die x -Werte in $f(x)$ einsetzt.

Wendepunkte:

notwendige Bedingung: $f''(x) = 0$

Setze $f''(x)$ gleich 0 und löse nach x auf.

Hinreichende Bedingung: $f''(x) = 0$ und $f'''(x) \neq 0$

Setze die gefundenen x -Werte in f''' ein.

Falls $f'''(x_0) \neq 0$ ist, folgt: f hat an der Stelle x_0 einen Wendepunkt.

(Sollte die hinreichende Bedingung nicht erfüllt sein, prüfe, ob f'' bei x_0 das Vorzeichen wechselt.

Falls dies der Fall ist, liegt bei x_0 ein Wendepunkt vor.)

Berechne die y -Werte der Wendepunkte, indem Du die x -Werte in $f(x)$ einsetzt.

Graph:

Trage alle oben berechneten Punkte des Graphen ein und verbinde zu einer Kurve, die auch die Symmetrie und das Verhalten im Unendlichen berücksichtigt.